1 Introduktion

Här ges en kort framställning av bohmsk mekanik och hur den förhåller sig till den konventionella kvantmekaniken. I händelse av tidsbrist, koncentrera dig på den matematiska strukturen – schrödingerekvationen, lotsvillkoret och sannolikhetsantagandet ($P \propto |\Psi|^2$) – så att du kan lösa uppgifterna.

1.1 Köpenhamnstolkningen

Den framställning av kvantmekaniken som återfinns i kurskompendiet följer i grova drag vad man brukar kalla **köpenhamnstolkningen**. Enligt denna skiljer sig mikrokosmos på ett fundamentalt sätt från vår vardagliga erfarenhetssfär, inte bara genom att klassisk fysik inte är tillämplig utan också i det att fenomen på kvantnivån inte anses existera oberoende av vår observation. Det är meningslöst att tala om en partikels läge, om vi inte har någon apparatur för att mäta just detta, samma sak med andra kvantiteter såsom rörelsemängd, energi, etc. All information som kan finnas om ett kvantsystem finns i vågfunktionen Ψ, men den ger bara *sannolikheten för ett visst resultat om en mätning görs*. Osäkerhetsrelationen sätter en definitiv gräns för hur mycket information som kan fås ur Ψ. Exempelvis kan vi inte bestämma en partikels läge och rörelsemängd samtidigt med godtycklig noggrannhet. Ett kvantsystems utveckling kan därför inte beskrivas i termer av banor, eftersom begreppet "bana" förutsätter att både hastighet och läge är väldefinierade. Enligt köpenhamnstolkningen är det inte heller så, att det finns en partikelbana som vi bara inte känner till; det *finns* ingen fysikalisk verklighet bortom vågfunktionen. Således har en partikel bara ett verkligt läge när vi mäter just läget. Det finns inte heller någon bakomliggande orsak till att partikeln vid en mätning befinns ha ett visst läge och inte ett annat; det finns bara en sannolikhet som ges av Ψ.

Enligt köpenhamnstolkningen måste vi alltså överge tanken på ett deterministiskt universum och en natur som existerar oberoende av vår observation av den. Det är då rimligt att fråga sig om detta är en ofrånkomlig slutsats. Skulle man inte kunna tänka sig en teori som gick bortom kvantmekaniken och verkligen beskrev naturen i termer av väldefinierade, deterministiska partilkelbanor men ändå gav precis samma förutsägelser som kvantmekaniken? Den förhärskande uppfattningen var länge att det inte var möjligt. Det presenterades t.o.m. ett (felaktigt) bevis för det. Ändå framlade David Bohm 1952, 26 år efter kvantmekaniken, en teori som åstadkom just detta.

1.2 Bohmsk mekanik

Denna teori, som vi skall kalla "bohmsk mekanik", har följande ingredienser:

- En våg med vågfunktionen $\Psi(\mathbf{r}, t)$, vilken uppfyller tidsberonde schrödingerekvationen:

$$i\hbar\frac{\partial\Psi(\mathbf{r},t)}{\partial t}=\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2+V(\mathbf{r},t)\right)\Psi(\mathbf{r},t)$$

- en partikel med läget $\mathbf{r}(t)$, vars hastighet ges av

$$\mathbf{v}(t)=(1/m)\nabla S(\mathbf{r},t), \tag{1}$$

  där S är vågfunktionens fas, definierad genom $\Psi=Re^{iS/\hbar}$.

Partikelns hastighet är sålunda entydigt bestämd av vågfunktionen. Man brukar kalla ekv. 1 "lotsvillkoret", eftersom vågen likt en lots talar om för partikeln vart den skall gå. Givet ett begynnelsevillkor för läget, $\mathbf{r}(0)$, är partikelns trajektoria också entydigt bestämd av Ψ. Vågfunktionen å sin sida utvecklas, givet ett begynnelsevillkor, $\Psi(\mathbf{r},0)$, helt deterministiskt enligt schrödingerekvationen. Bohms teori är alltså helt deterministisk och innehåller inga direkta referenser till mätningar och observatörer.

Men om nu allt detta stämmer, vad skall vi då med osäkerhetsrelationen till? Behöver vi överhuvud taget räkna med sannolikheter? Svaret på dessa frågor ligger i det faktum att det inte går att bestämma begynnelsevillkoren, $\mathbf{r}(0)$ och $\Psi(\mathbf{r},0)$, exakt i ett experiment. Det finns i själva verket inget sätt att mäta Ψ direkt. Vad vi kan göra är statistiska förutsägelser om resultatet vid många försök, och för det behövs en statistisk modell. I Bohms teori ingår därför det *extra* antagandet att sannolikhetsfördelningen för partikelns läge, $P(\mathbf{r},t)$, ges av $|\Psi(\mathbf{r},t)|^2$. Det är precis som i den konventionella kvantmekaniken, men med skillnaden att $P(\mathbf{r},t)$ betecknar sannolikheten att partikeln verkligen *har* läget $\mathbf{r}$ vid tiden t och inte sannolikheten att den *befinns* ha det vid en mätning.

Låt oss, för att ta ett exempel, betrakta dubbelspaltexperimentet (Young-Mills försök i kurskompendiet, s. 25), där elektroner skjuts mot en skärm med två parallella spalter och sedan detekteras på en skärm bakom. Ett interferensmönster svarande mot just två spalter uppstår på skärmen även om elektronerna ivägsänds en och en. Detta tolkas vanligen så, att elektronen på något sätt går genom båda spalterna och växelverkar med sig själv. Enligt köpenhamnstolkningen är det i själva verket inte meningsfullt att fråga sig vilken väg elektronen tar, om vi inte mäter just detta. I bohmsk mekanik däremot blir tolkningen av experimentet tämligen enkel: elektronen tar antingen den ena eller den andra vägen, beroende på begynnelsevillkor. Interferensmönstret skapas av den medföljande vågen, som lotsar elektronen till någon punkt på skärmen där interferensen är konstruktiv.

Nu måste ju denna teori, om den är riktig, reproducera kvantmekanikens förutsägelser, och det är långt från uppenbart att det åstadkoms genom ekvationerna ovan. Det var en bedrift av Bohm att visa just detta. Vi skall inte göra det här, men vi kan göra det troligt genom en omskrivning av lotsvillkoret:

$$\mathbf{v}=-\frac{i\hbar}{2m}\frac{[\Psi^*\nabla\Psi-\Psi\nabla\Psi^*]}{|\Psi|^2}=\frac{\mathbf{J}}{|\Psi|^2}, \tag{2}$$

där $\mathbf{J}$ är sannolikhetsströmtätheten, definierad som i kurskompendiet. Partikeln följer alltså sannolikhetsströmmens riktning i den aktuella punkten $\mathbf{r}$.

I fråga om experimentella resultat ger den bohmska mekaniken precis samma förutsägelser som den konventionella kvantmekaniken, varken mer eller mindre. Avsikten är alltså inte att skapa en teori som stämmer bättre med experiment utan att att komma ifrån de konceptuella svårigheter som köpenhamnstolkningen för med sig. På köpet får man en teori som kanske är lättare att resonera kring och förstå intuitivt, men det är ju en subjektiv fråga. Det är meningen att du själv skall ta ställning till om bohmsk mekanik kan främja förståelsen av kvantmekaniken.

2 Uppgifter

För att bekanta oss med den bohmska mekaniken på ett lite handgripligare sätt skall vi se hur den fungerar i ett konkret fall. Det exempel vi skall studera är den harmoniska oscillatorn. Skälet till detta val är att den harmoniska oscillatorn är en mycket viktig kvantfysikalisk tillämpning och ett av de få problem för vilka hela spektret av egenfunktioner kan bestämmas exakt. Tidsutvecklingen av vågfunktionen blir då nästan trivial (se kapitel X i kompendiet, “Vågpaketets rörelse”), och vi kan koncentrera oss på det som särskiljer den bohmska mekaniken från det traditionella angreppssättet, nämligen trajektorian, $x(t)$.

Uppgifterna nedan är bara förslag. Egna idéer är alltid välkomna. Uppgift 3 kan, lite beroende på hur man gör, ta en del beräkningstid. Om detta blir ett problem, hoppa över uppgiften.

2.1 Partikeldynamik

Betrakta den harmoniska oscillatorn i en dimension:

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$$

För enkelhets skull, sätt $\alpha = m\omega/\hbar = 1$. (Varför innebär detta ingen inskränkning?) Låt den initiala vågfunktionen vara av formen

$$\Psi(x,0) = \left(\frac{1}{\sqrt{\pi(\Delta x)^2}}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{(x-x_0)^2}{2(\Delta x)^2}\right),$$

dvs. låt $|\Psi(x,0)|^2$ vara ett gaussiskt vågpaket med vidden Δx centrerad kring $x = x_0$. Beräkna med hjälp av lotsvillkoret, ekv. 1, tidsutvecklingen av partikelns läge, $x_p(t)$, för olika begynnelsevillkor, $x_p(0)$, och olika värden på parametrarna x_0 och Δx. Som jämförelse, beräkna den klassiska banan, $x_p^{\mathrm{kl}}(t)$, och avgör när och på vilket sätt x_p skiljer sig från $x_p^{kl}(t)$.

Notera att fallet $x_0 = 0$ och $\Delta x = 1$ är harmoniska oscillatorns grundtillstånd. Vad händer då? Prova med att låta $\Psi(x,0)$ vara något annat stationärt tillstånd. Kan du förklara resultatet med hjälp av ekvation 1? (Hjälp: lotsvillkoret kan också skrivas

$$v = \frac{\hbar}{m} \frac{\mathrm{Im}[\Psi^*(d/dx)\Psi]}{|\Psi|^2}.)$$

Prova gärna något annat $\Psi(x,0)$ också, t.ex. en linjärkombination av stationära tillstånd, för att testa generaliteten hos dina slutsatser. Enda kravet på $\Psi(x,0)$ är att den skall vara normerad.

2.2 Sannolikhet

För att den bohmska mekaniken skall ge samma förutsägelser som (den traditionella) kvantmekaniken, måste det gälla att sannolikhetsfördelningen i rummet $P(x,t)$ ges av $|\Psi(x,t)|^2$. Anta att detta gäller vid $t = 0$ och visa att sannolikhetsfördelningen sedan följer just $|\Psi(x,t)|^2$. Vad du skall göra är alltså att generera begynnelsevillkor $x(0)$ enligt sannolikhetfördelningen $P(x,0) = |\Psi(x,0)|^2$, tidsutveckla var och en av dessa med hjälp av vågfunktionen till någon tidpunkt $t > 0$, och visa att $P(x,t) = |\Psi(x,t)|^2$ fortfarande gäller.

2.3 Ehrenfests teorem

Visa med exempel att Ehrenfests teorem i form av

$$\frac{d}{dt}\langle p \rangle = \langle -\frac{d}{dx} V(x) \rangle$$

är uppfyllt. Generera som i föregående uppgift begynnelsevillkor enligt någon fördelning, tidsutveckla lägena med hjälp av vågfunktionen, och studera hur medelvärdet av läget ändras med tiden.